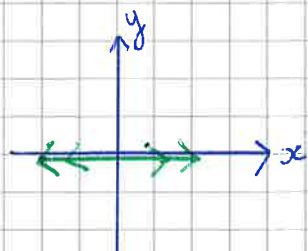




ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

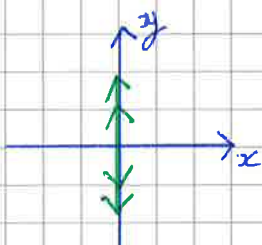
C34 - Pola rectiligne

Si E_{ox} et E_{oy} sont en phase ou antiphase



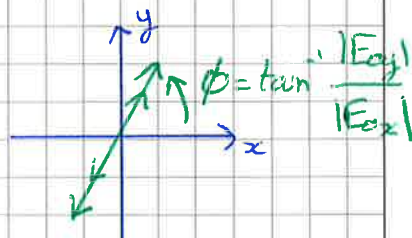
$$E_{ox} \neq 0$$

$$E_{oy} = 0$$



$$E_{ox} = 0$$

$$E_{oy} \neq 0$$



$$E_{ox} \neq 0$$

$$E_{oy} \neq 0$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{|E_{oy}|}{|E_{ox}|}$$

Exemples:

$$\vec{E} = \hat{x} e^{-j2z}$$

$$\vec{E} = [\hat{x} + \hat{y}] e^{-5jz} \rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$$

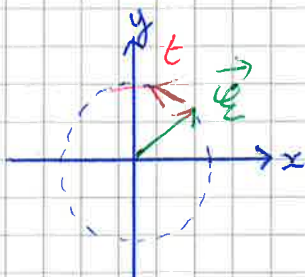
$$\vec{E} = [5\hat{y} - 8\hat{z}] e^{j8x} \rightarrow \phi = -1.01 \text{ rad}$$

C35 - Pola circulaire

Si $|E_{ox}| = |E_{oy}|$ et E_{ox}, E_{oy} sont en quadrature de phase.

ex: $\vec{E} = (\hat{x} - j\hat{y}) e^{-j\beta z}$, $\beta > 0$. Dans le plan $z = 0$, $\vec{E} = \hat{x} - j\hat{y}$

$$\Rightarrow \vec{E} = \text{Re} \{ (\hat{x} - j\hat{y}) e^{j\omega t} \} = \hat{x} \cos \omega t + \hat{y} \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \hat{x} \cos \omega t + \hat{y} \sin \omega t$$



sens horaire ou anti-horaire?

Convention IEEE:

horaire/antihoraire $\rightarrow$ par rapport à la source.



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE



PC horaire ou
"right-handed"



PC anti-horaire ou
"left-handed"



PC anti-horaire
"left handed"



PC horaire
"right-handed"

Truc: On cherche quelle main, en enroulant les doigts dans le sens où tourne le champ, nous donne un pouce dans la direction de $\hat{\beta}$:

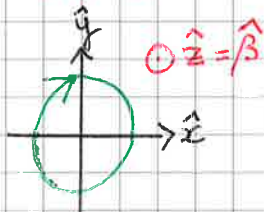
- main droite = PC horaire

- main gauche = PC anti-horaire

C.36 - Exemples de polarisations circulaires

* $\vec{E} = (\hat{x} + j\hat{y}) e^{-j\beta z}$ ← propagation vers $\hat{z}$

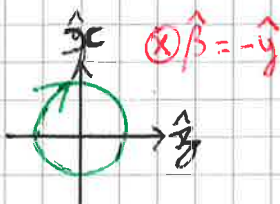
$E_x = 1$ $E_y = j = e^{j\pi/2}$ → en avance



→ main gauche → PC anti-horaire

* $\vec{E} = \{ (1+j)\hat{x} + (1-j)\hat{z} \} e^{j10y}$ ← propagation vers $-\hat{y}$

$E_x = \sqrt{2} e^{j\pi/4}$ $E_z = \sqrt{2} e^{-j\pi/4}$



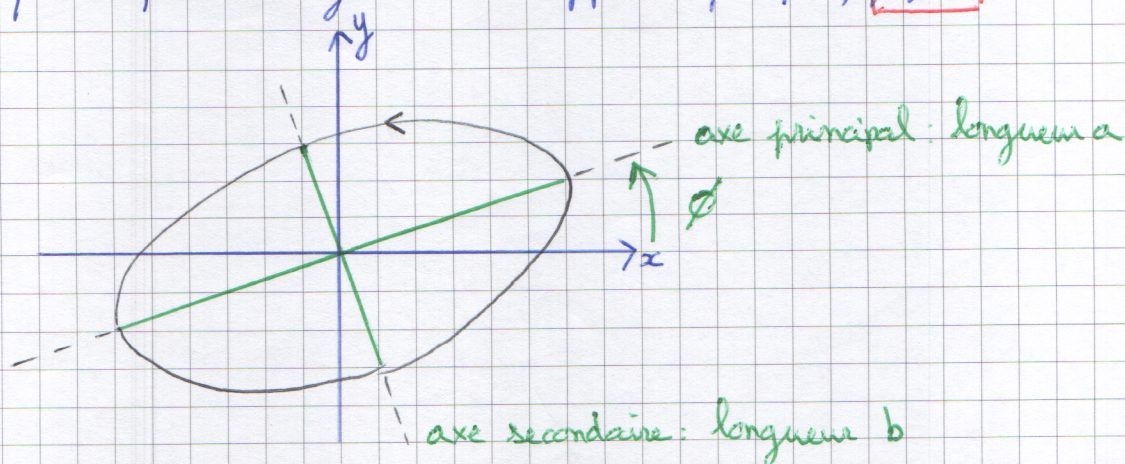
→ main droite → PC horaire



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

C37 - Polarisation elliptique

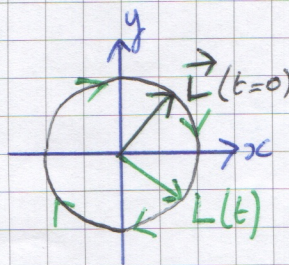
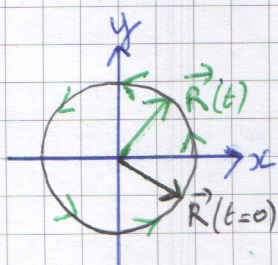
E_{0x}, E_{0y} quelconques = cas général. Supposons $\vec{\beta} = \beta \hat{z}$, $\beta > 0$



L'ellipse de polarisation est caractérisée par $\frac{a}{b}$, ϕ , et son sens.

On définit, pour trouver ces paramètres :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{R} = \hat{x} - j\hat{y} & \text{vecteur PC horaire} \\ \vec{L} = \hat{x} + j\hat{y} & \text{vecteur PC anti horaire} \end{array} \right\} \text{ car } \hat{\beta} \text{ suivant } +\hat{z} \text{ (opposé sinon)}$$



$$\text{On a } \hat{x} = \frac{\vec{R} + \vec{L}}{2} \text{ et } \hat{y} = \frac{\vec{L} - \vec{R}}{2j}$$

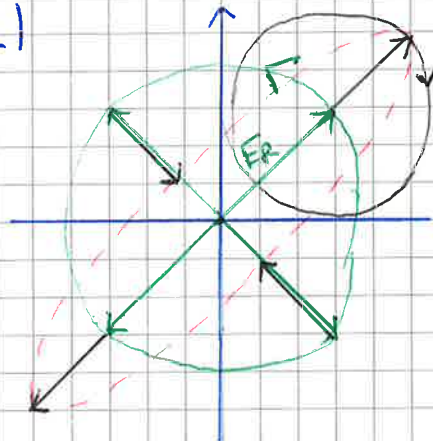
$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{E}(z=0) &= E_{0x} \hat{x} + E_{0y} \hat{y} = E_{0x} \frac{\vec{R} + \vec{L}}{2} + E_{0y} \frac{\vec{L} - \vec{R}}{2j} \\ &= \underbrace{\frac{E_{0x} - jE_{0y}}{2}}_{E_L} \vec{L} + \underbrace{\frac{E_{0x} + jE_{0y}}{2}}_{E_R} \vec{R} \end{aligned}$$

→ superposition de 2 PC de mêmes et phases différentes



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

ex: si $|E_R| > |E_L|$



On écrit $E_R = |E_R| e^{j\theta_R}$, $E_L = |E_L| e^{j\theta_L}$

On trouve le sens en comparant $|E_R|$ et $|E_L|$ (la composante PC la plus grande l'emporte).

Rapport $\frac{a}{b} ?$ $\frac{a}{b} = \frac{|E_R| + |E_L|}{|E_R| - |E_L|}$

signes négatifs

Angle ϕ ? $\phi = \phi_R + \omega t_a = -\theta_L + \omega t_a \Rightarrow \phi = \frac{\theta_R - \theta_L}{2}$
 t_a : temps de l'alignement de $\vec{R}$ et $\vec{L}$

C38 - Exemple $\vec{E} = (3\hat{x} + (2-j)\hat{y})e^{-j10z}$, $\hat{\beta} \parallel +\hat{z}$

$$E_L = \frac{1}{2}(E_{0x} - jE_{0y}) = \frac{1}{2}(3 - j(2-j)) = 1-j = \sqrt{2}e^{-j\pi/4}$$

$$E_R = \frac{1}{2}(E_{0x} + jE_{0y}) = \frac{1}{2}(3 + j(2-j)) = 2+j = \sqrt{5}e^{j26.6^\circ}$$

$\Rightarrow$ elliptique avec $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = 4.44$ et $\phi = 35.8^\circ$

propagation vers $+\hat{z}$ avec $|E_R| > |E_L| \Rightarrow$ PE horaire.



c - Conducteurs et effet de peau

Modèle des pertes: $\epsilon, \mu \in \mathbb{R}$ mais $\vec{J}$ peuvent exister:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E} + \vec{J}_{\text{ind}} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \vec{J}_{\text{ind}} = \sigma\vec{E} \quad \text{loi d'Ohm locale ("I = \frac{1}{R} U")}$$

bon modèle à basse fréquence

Par rapport au a), la seule différence est dans l'équation

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E} + \sigma\vec{E} = j\omega\underbrace{\epsilon\left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)}_{\epsilon_{\text{eff}} \in \mathbb{C}} \vec{E}$$

$\Rightarrow$ tout est pareil mais on remplace $\epsilon \in \mathbb{R}$ par $\epsilon_{\text{eff}} \in \mathbb{C}$!

$$\Rightarrow \vec{E} = \hat{e} E_0 e^{-j\beta_{\text{eff}} z} \quad \text{avec} \quad \beta_{\text{eff}}^2 = \omega^2 \mu \epsilon_{\text{eff}}$$

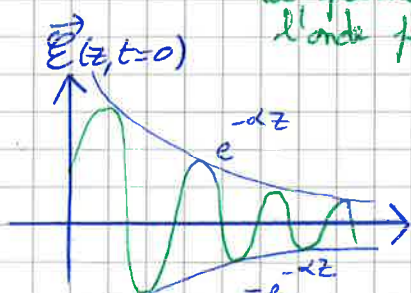
$$\Rightarrow \beta_{\text{eff}}^2 = \omega^2 \mu \epsilon \left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right) \in \mathbb{C} !$$

$\Rightarrow \beta_{\text{eff}} = -j\alpha + \beta$ devient complexe

$$\Rightarrow \vec{E} = \hat{x} E_0 e^{-j\beta_{\text{eff}} z} \text{ devient } \vec{E} = \hat{x} E_0 e^{-j(\beta - j\alpha)z}$$

$$= E_0 \hat{x} e^{-j\beta z} e^{-\alpha z} \Rightarrow \vec{E} = \hat{x} E_0 \cos(\omega t - \beta z) e^{-\alpha z}$$

la partie imaginaire α correspond à l'atténuation de l'onde plane





ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

C39 - Calcul de β et α

$$\beta_{eff}^2 = \omega^2 \mu \epsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right) = (\beta - j\alpha)(\beta - j\alpha) = \beta^2 - \alpha^2 - 2j\alpha\beta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta^2 - \alpha^2 = \omega^2 \mu \epsilon \\ 2\alpha\beta = \omega^2 \mu \epsilon \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \end{cases} \quad (*) \Rightarrow$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \left\{ \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)^2} - 1 \right] \right\}^{1/2} \quad [\text{Np/m}]$$

$$\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \left\{ \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)^2} + 1 \right] \right\}^{1/2} \quad [\text{rad/m}]$$

(*) détails du calcul:

$$\begin{cases} 4\alpha^2\beta^2 - 4\alpha^4 = 4\alpha^2\omega^2\mu\epsilon \\ 4\alpha^2\beta^2 = (\omega^2\mu\epsilon)^2 \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow (\omega^2\mu\epsilon)^2 \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 - 4\alpha^4 - 4\alpha^2\omega^2\mu\epsilon = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^4 + \omega^2\mu\epsilon\alpha^2 - \frac{(\omega^2\mu\epsilon)^2}{4} \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{2} \omega^2\mu\epsilon \left[\underset{\text{impossible}}{\ominus} \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1 \right]$$

$$\Rightarrow \beta^2 = \alpha^2 + \omega^2\mu\epsilon = \frac{1}{2} \omega^2\mu\epsilon \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1 \right] \quad (*)$$

Profondeur de peau / pénétration

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\omega \sqrt{\mu \epsilon} \left\{ \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)^2} - 1 \right] \right\}^{1/2}} \quad [\text{m}]$$

distance que l'onde doit parcourir pour voir son amplitude multipliée par $\frac{1}{e} = 37\%$

* Tangente de perte $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$

$$\tan \delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\epsilon''}{\epsilon'} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon}$$

Bon isolant/dielectrique : $\left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)^2 \ll 1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha \approx \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \\ \beta \approx \omega \sqrt{\mu \epsilon} \end{cases}$

Bon conducteur : $\left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)^2 \gg 1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha \approx \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} \\ \beta \approx \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} \end{cases}$

* Longueur d'onde ?

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\text{Re}\{\beta_{\text{eff}}\}}$$

* Impédance caractéristique ?

$$\vec{H} = \frac{1}{Z_{\text{eff}}} (\hat{\beta}_{\text{eff}} \times \vec{E})$$

$$\eta_{\text{eff}} = \frac{\omega \mu}{\beta_{\text{eff}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_{\text{eff}}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}}}$$

$$\Rightarrow \eta_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{j\omega \mu}{\sigma + j\omega \epsilon}} \in \mathbb{C} \Rightarrow \vec{E} \text{ et } \vec{H} \text{ n'oscillent plus en phase}$$

* Généralisation Modèle avec pertes diélectriques

On suppose $\vec{J} = \vec{0}$ mais $\epsilon = \epsilon_c = \epsilon' - j\epsilon'' \in \mathbb{C}$
($\sigma = 0$)

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = j\omega (\epsilon' - j\epsilon'') \vec{E} = \omega \epsilon'' \vec{E} + j\omega \epsilon' \vec{E}$$

$\Rightarrow$ on peut utiliser les formules d'avant pour α et β mais en remplaçant σ par $\omega \epsilon''$ et ϵ par ϵ'